

Jagiellońskie Warsztaty Olimpijskie 2025/2026

Spotkanie 2 (22 listopada 2025)

Kacper Piotrowski, Anatoli Shatsila, Jakub Węgrecki

RÓWNANIA FUNKCYJNE

Zadanie 1. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia nierówność $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(f(f(0))) = 0$. Wykazać, że $f(0) = 0$.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniają równanie

$$f(x)f(y) = f(y) + xy + y.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które spełniają nierówności

$$f(x) \leq x \quad \text{oraz} \quad f(x + y) \leq f(x) + f(y),$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x.$$

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniają równanie

$$f(f(x) + y) = 4yf(x) + f(x^2 - y).$$

Zadanie 6. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ taka, że dla $x, y \in \mathbb{R}^+$ zachodzi równość

$$f(x)f(y) = f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Wykazać, że $f(x) \geq 2$.

Zadanie 7. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniają równanie

$$f(x^3) + f(y^3) = (x + y)f(x^2) + f(y^2) - f(xy).$$

Zadanie 8. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ takie, że

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich m i n .

Zadanie 9. Dana jest taka funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x)$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Zadanie 10. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, które spełniają oba następujące warunki:

- $f(x) + f(y) \geq xy$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y
- dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y że $f(x) + f(y) = xy$.

Zadanie 11. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

Zadanie 12. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ które dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in [0, 1]$ spełniają równości

$$\begin{cases} \{f(x)\} \sin^2 x + \{x\} \cos f(x) \cos x = f(x) \\ f(f(x)) = f(x). \end{cases}$$

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniają równanie

$$1 + f(xy) = f(x + f(y)) + (y-1)f(x-1).$$

Zadanie 14. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniają równanie

$$f(x+y)^3 = (x+2y)f(x^2) + (x^2+3xy+y^2)f(f(y)).$$

Zadanie 15. Wykazać, że dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieją liczby rzeczywiste x, y takie, że

$$f(x - f(y)) > yf(x) + x.$$